آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی (۱) نام و نام خانوادگی ....مورخه: ۹۰/۳/۲۱ شماره دانشجویی ....زمان : ۱۱۰ دقیقه	رشته : مهندسی شیمی مقطع : کارشناسی

دانشگاه صنعتی سهند

توجه: تعداد سئوالات ۶ عدد در پشت و روی این برگه می باشد.

۱. (۱/۵ نمره)
با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\cos x > ۱ - \frac{x^۲}{۲}.$$

۲. (۱/۵ نمره)
الف) حدود زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \to ۰^+} x \ln x, \qquad \lim_{x \to ۰} x \ln |x|.$$

ب) اگر $f(x) = x \ln |x|$ آیا می توان مقدار $f(۰)$ را طوری تعریف کرد که تابع f در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد؟

۳. (۶ نمره)
انتگرالهای زیر را بدست آورید

$$a) \quad \int \frac{۱}{x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۲x + ۱} dx$$

$$b) \quad \int \frac{۱}{(۲ + \cos x) \sin x} dx$$

$$c) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt[۶]{۱ + x^۶}}.$$

۴. (۲ نمره)
نوع انتگرال مجازی زیر را تعیین کرده و همگرایی یا واگرایی آن را بررسی کنید

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{۲}} dx.$$

۵. (۳ نمره)
الف) مساحت ناحیه واقع بین دایره $r = \sqrt[۴]{۱۲} \sin\theta$ و درون لمنسکیت $r^{۲} = \sin ۲\theta$ را محاسبه کنید.
ب) شکل $r = \cos ۴\theta$ را رسم کرده و طول کل آن را بدست آورید.

۶. (۳ نمره)
الف) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید

$$a) \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ + n^{۴/۳}}{۲ + n^{۵/۳}}, \qquad b) \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^{۲}}{۱ + n\sqrt{n}}.$$

ب) به ازای چه مقادیری از x سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(x-۲)^{۲}}{۳^{n}\sqrt{n}}$$

(a) مطلقا همگراست؟
(b) همگرای مشروط است؟
(c) واگراست؟

موفق باشید.
فرضی
farzi@sut.ac.ir

بسمه تعالی

پاسخ های آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی (۱) مهندسی شیمی ۹۰/۳/۲۱ زوج

① با فرض $f(x) = \cos x + x^2/2$ در بازه $[0,x]$ از قضیه مقدار میانگین داریم

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad , \quad a<c<b \qquad \begin{cases} a=0 \\ b=x \end{cases}$$

$$\frac{\cos x + x^2/2 - 1 - 0}{x-0} = -\sin c + c$$

$$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 = x(-\sin c + c)$$

می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی نامنفی c ؛ $\sin c \le c$ لذا

$$\cos x + x^2/2 - 1 \geq 0$$

با توجه به اینکه با تغییر x به $-x$ تغییری در نامساوی فوق روی نمی‌دهد لذا رابطه فوق برای مقادیر منفی x نیز برقرار است.

---

② الف)

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to0} x\ln|x| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} x\ln(-x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \end{cases}$$

بنابراین $\lim_{x\to0} x\ln|x| = 0$.

ب) با توجه به قسمت (الف) حد تابع $f(x)=x\ln|x|$ در $x=0$ موجود و برابر 0 است لذا با فرض $f(0)=0$ تابع در همه جا پیوسته خواهد بود.

س 2

(a) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$ (3)

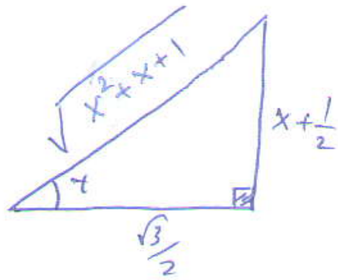
$$=\left((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right)^2$$

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\int\frac{dx}{\left((x+\frac12)^2+\frac34\right)^2}$$

$$=\int\frac{du}{(u^2+\frac34)^2}\qquad x+\tfrac12=u,\quad dx=du$$

$$=\int\frac{\frac{\sqrt3}{2}(1+\tan^2 t)\,dt}{(\frac34\tan^2 t+\frac34)^2}\qquad u=\tfrac{\sqrt3}{2}\tan t,\quad du=\tfrac{\sqrt3}{2}(1+\tan^2 t)\,dt$$

$$=\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\int\frac{dt}{1+\tan^2 t}=\frac{8\sqrt3}{9}\int\cos^2 t\,dt$$



$$=\frac{8\sqrt3}{9}\cdot\frac12(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{4\sqrt3}{9}\left(\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac12}{\sqrt3/2}\right)+\frac{x+\frac12}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\frac{\sqrt3/2}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)+C$$

$$=\frac{4}{3\sqrt3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right)+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+C$$

(b) $t=\tan\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{(1+t^2)\,dt}{t(3+t^2)}$$

با تجزیه کسر داریم:

$$=\int\frac{\frac13}{t}\,dt+\int\frac{\frac23 t}{3+t^2}\,dt=\frac13\ln t+\frac13\ln(3+t^2)+C$$

$$=\frac13\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\frac13\ln\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C$$

$$(c)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = \int x^{-1}(1+x^6)^{-1/6}\,dx$$

تغییر متغیر $z^6 = 1+x^6$ را در نظر می‌گیریم:

$$6z^5\,dz = 6x^5\,dx \Rightarrow dx = \frac{z^5\,dz}{x^5}$$

$$x^{-1}(1+x^6)^{-1/6}\,dx = x^{-1}z^{-1}\cdot\frac{z^5\,dz}{x^5} = \frac{z^4\,dz}{x^6} = \frac{z^4\,dz}{z^6-1}$$

کسر $\frac{z^4}{z^6-1}$ را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{z^4}{z^6-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z^2-z+1)(z^2+z+1)}$$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{Cz+D}{z^2-z+1} + \frac{Ez+F}{z^2+z+1}$$

با ضرب طرفین در $z-1$ و قرار دادن $z=1$ داریم $A = 1/6$

با ضرب طرفین در $z+1$ و قرار دادن $z=-1$ داریم $B = -1/6$

با جمع و مقایسه طرفین داریم:

ثابت: $\frac{1}{3} - F - D = 0$

z: $-C - E - D + F = 0$

z^2: $\frac{1}{3} - C + E = 0$

z^3: $D - F = 0$

z^4: $\frac{1}{3} + C + D - E + F = 1$

z^5: $C + E = 0$

$$\Rightarrow \quad D = F = \frac{1}{6}, \qquad E = -C = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{z^4}{z^6-1} = \frac{1/6}{z-1} + \frac{-1/6}{z+1} + \frac{\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}}{z^2-z+1} + \frac{-\frac{1}{6}z+\frac{1}{6}}{z^2+z+1}$$

$$\int \frac{\frac{1}{6}}{z-1}\,dz = \frac{1}{6}\ln|z-1|$$

$$\int \frac{-\frac{1}{6}}{z+1}\,dz = -\frac{1}{6}\ln|z+1|$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{z+1}{z^2-z+1}\,dz = \frac{1}{6}\int \frac{z+1}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dz = \frac{1}{6}\int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

$$z-\tfrac{1}{2}=u$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left(u^2+\tfrac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left(\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(z-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left(z^2-z+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}\,dz = -\frac{1}{6}\int \frac{z-1}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dz = -\frac{1}{6}\int \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

$$u=z+\tfrac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{12}\ln\left(u^2+\tfrac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{12}\ln\left(z^2+z+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)$$

با جاگذاری داریم:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = \int \frac{z^4\,dz}{z^6-1} = \frac{1}{6}\ln|z-1| - \frac{1}{6}\ln|z+1|$$

$$+\frac{1}{12}\ln\left(z^2-z+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{12}\ln\left(z^2+z+1\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

با قرار دادن $z=\sqrt[6]{1+x^6}$ جواب نهایی به دست می‌آید.

4

به ازای $0 \le x \le \pi/2$ داریم

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

(با قضیه مقدار میانگین می‌توان آن را ثابت کرد).

لذا داریم

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx \geq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \geq \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2}{\pi}x}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \ln x \Big|_0^{\pi/2} = \infty$$ واگرا

---

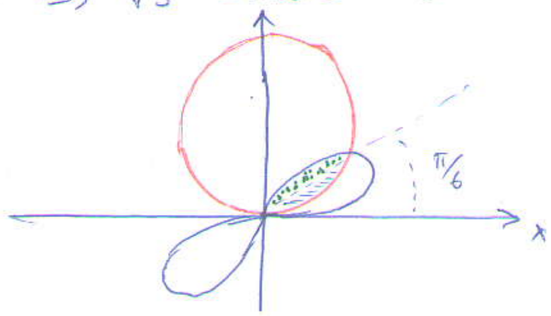
5 (الف)

$$r = \sqrt[4]{12}\,\sin\theta \implies r^2 = \sqrt{12}\,\sin^2\theta$$

$$r^2 = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\implies \sqrt{12}\,\sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \implies \sqrt{3}\,\sin\theta = \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = \pi/6$$



می‌دانیم: $\left\{ A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta \right.$

مساحت محصور بین $r=f(\theta)$ و شعاع‌های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$. $(\alpha<\beta)$.

لذا مساحت مورد نظر برابر است با مساحت دایره بین $\alpha=0$، $\beta=\pi/6$، و مساحت زیر لمنیسکیت بین $\alpha=\pi/6$، $\beta=\pi/2$.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sqrt{12}\,\sin^2\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta$$

$$= \sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right\}_0^{\pi/6} - \frac{1}{4}\cos 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \sqrt{3}\left\{\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} - \frac{1}{4}\left\{-1-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \pi\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

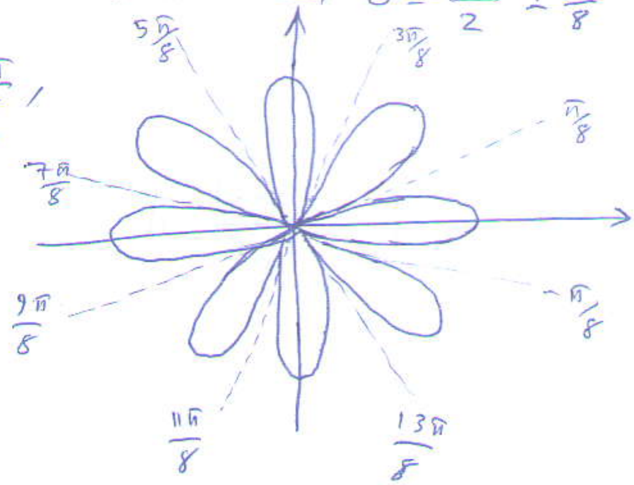
ب)

$r = \cos 4\theta$

$r = 0 \Rightarrow \cos 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

$\theta = \underbrace{\pm\frac{\pi}{8}}_{k=0}, \underbrace{\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}}_{k=1}, \underbrace{\frac{9\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}}_{k=2},$

$\underbrace{\frac{13\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}}_{k=3}$



برای محاسبه طول قوس معادلات به فرم قطبی از رابطه زیر استفاده می‌شود

$r = f(\theta), \quad \alpha < \theta < \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta = 16\int_0^{\pi/8} \sqrt{16\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta}\, d\theta$$

$$= 16\int_0^{\pi/8} \sqrt{15\sin^2 4\theta + 1}\, d\theta$$

این یک انتگرال بیضوی است و به صورت تحلیلی قابل حل نیست.

---

4 الف)

(a) $\frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ واگرا $\Rightarrow$ سری واگرا

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} = \infty \Rightarrow$ شرط لازم برای همگرایی وجود ندارد $\Rightarrow$ سری واگرا

ب)

$$\left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n}}} \right| < 1 \Rightarrow |x-2| < \left(\frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^{-1} \longrightarrow 3$$

$|x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3$

$-1 < x < 5$ در این بازه سری مطلقاً همگراست.

برای $x=-1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ طبق آزمون سری‌های متناوب همگراست ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{n}}$ واگرا

برای سایر نقاط دیگر سری واگراست.