



دانشگاه صنعتی سهند

رشته: مهندسی برق
مقطع: کارشناسی
مورخه: ۹۳/۱۰/۱۷
زمان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی (۱)

نام و نام خانوادگی شماره دانشجویی

۱. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

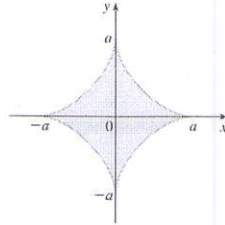
$$\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{1+\cos \theta} d\theta \quad (2)$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \quad (n \neq 1) \quad (3)$$

۲. منحنی $y^2 = x$ را در فاصله $0 \leq x \leq 1$ در نظر بگیرید و موارد زیر را محاسبه کنید
الف) مساحت حاصل از دوران حول محور x ها
ب) حجم حاصل از دوران حول محور x ها
ج) طول خم

۳. مساحت محصور به آستروئید $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ را بدست آورید.



۴. منحنی قطبی $r = \theta^2$ را برای $0 \leq \theta \leq 16\pi$ رسم کرده و طول خم آن را در بازه $0 \leq \theta \leq 2\pi$ بدست آورید.

۵. دامنه تابع بسمل مرتبه صفر (بازه همگرایی سری) را بدست آورید

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n+1}}$$

موفق باشید.

فرضی
farzi@sut.ac.ir

مسئله 1:
$$1. \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \Rightarrow B=-1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + 3 \tan^{-1}(x) + C$$

توجه: این مسئله را با حالتی $x = \tan \theta$ نیز می توان حل کرد.

2.
$$\int \frac{d\theta}{1+\cos \theta} = \int \frac{d\theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \int \sec^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \tan \frac{\theta}{2} + C$$

توجه: روش دوم برای حل این مسئله با استفاده از $u = \tan \frac{\theta}{2}$ است. $\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ و $d\theta = \frac{2 du}{1+u^2}$

3.
$$\int \sec^n x dx = \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_u \cdot \underbrace{\sec^2 x dx}_{dv} = \sec^{n-2} x \cdot \tan x - \int (n-2) \sec^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx$$

$$\begin{cases} u = \sec^{n-2} x \\ dv = \sec^2 x dx \\ du = (n-2) \sec^{n-3} x \cdot \sec x \tan x = (n-2) \sec^{n-2} x \tan x dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

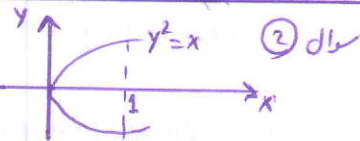
$$= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \cdot \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

ابتدا توجه کنید برای ds از یک فرم های زیر می توان استفاده کرد:

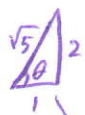
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1+4y^2} dy \quad \text{یا} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1+\frac{1}{4x}} dx = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}$$



1. مساحت سطح حاصل از دوران:
$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1+4y^2} dy = 2\pi \cdot \frac{(1+4y^2)^{3/2}}{6} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (1+4y^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

2. حجم حاصل از دوران:
$$V = \int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

3. طول قوس:
$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2} dy = \int_0^{\tan^{-1}(2)} \frac{1}{2} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \tan \theta \cdot \sec \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right\} \Big|_0^{\tan^{-1}(2)}$$



$$2y = \tan \theta$$

$$dy = \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\tan \theta = 2, \sec \theta = \sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{5} + 2| \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2)$$

مسئله 3:
$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 \underbrace{(a \sin^3 \theta)}_y \cdot \underbrace{(-3a \cos^2 \theta \sin \theta d\theta)}_{dx} = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$\sin^4 \theta \cos^2 \theta = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} \right)^2 \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{8} (1-\cos 2\theta) (1-\cos^2 2\theta)$$

$$= \frac{1}{8} (1-\cos 2\theta) \left(1 - \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{16} (1-\cos 2\theta) (1-\cos 4\theta)$$

$$= \frac{1}{16} (1 - \cos 4\theta - \cos 2\theta + \cos 2\theta \cos 4\theta)$$

$$= \frac{1}{16} \left(1 - \cos 4\theta - \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 6\theta \right)$$

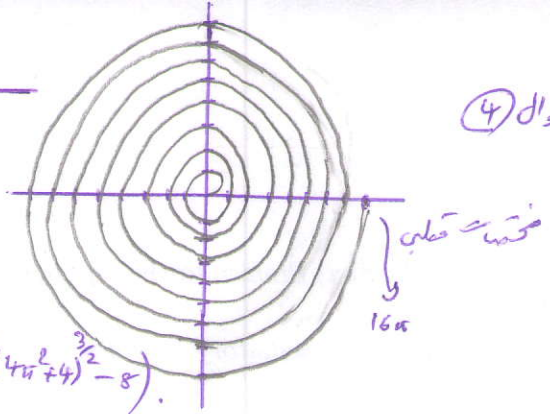
$$= 12a^2 \cdot \frac{1}{16} \left\{ \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{12} \sin 6\theta \right\} \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{12a^2}{16} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{8}$$

$$r = \theta^2 \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = 2\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta^2)^2 + (2\theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \theta \sqrt{\theta^2 + 4} d\theta = \frac{(\theta^2 + 4)^{3/2}}{2 \cdot 3/2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \left((4\pi^2 + 4)^{3/2} - 8 \right)$$



سوال 5) برای پیدا کردن دامنه (نامم هندسی) از آزمون نسبت استفاده کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2} (n+1)!^2} \cdot \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^2 = 0$$

چون x یک مقدار ثابت است

چون هیچ حد صفر از 1 کمتر است لذا سری با نامم هندسی مقادیر x مقادیر در تمام \mathbb{R} و نیز مقادیر \mathbb{R} است.

سوال 6) با توجه به اینکه $a_n = (-1)^n$ بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ یک سری متناوب است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \quad \text{و} \quad b_n > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} (x+1)^{-3/2} < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \Rightarrow b_{n+1} < b_n$$

بنابراین طبق قضیه مقادیر متناوب و نتیجه می شود سری فوق هندسی است.

مرتضی باهنر

دکتر جواد زین

۹۳/۱۰/۲۱