دانشگاه صنعتی سهند آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی (۱) نام و نام خانوادگی .... شماره دانشجویی	رشته : مهندسی شیمی مقطع : کارشناسی مورخه: ۹۴/۹/۸ زمان : ۹۰دقیقه

ارزش این آزمون ۵ نمره است.

۱. مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید (0.5)

$$e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$$

۲. قضیه مقدار میانگین را بیان کرده و با استفاده از آن نشان دهید (0.5)

$$\ln x \leq x-1, \qquad x \geq 1.$$

۳. با استفاده از تعریف انتگرال ریمان مقدار حد زیر را محاسبه کنید (0.5)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}.$$

۴. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $x=(y-3)^2$ و $x=4$ را حول $y=1$ بدست آورید. (1)

۵. انتگرالهای زیر را بدست آورید

$$a) \quad \int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx, \qquad (0.75)$$

$$b) \quad \int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy, \qquad (0.75)$$

$$c) \quad \int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy, \qquad (0.5).$$

۶. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید (0.5)

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$$

موفق باشید.

دکتر فرضی
farzi@sut.ac.ir

بسمه تعالی

پاسخ های آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی (۱) ۹۴،۹،۸

---

(1)

$$e^{-i\pi/6} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) + 2i\sqrt{4-3}\right) = \frac{1}{4}(2\sqrt{3}+2i) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

$$e^{-i\pi/6}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = \frac{1}{4}\left((\sqrt{3})^2 - (-1)\right) = 4/4 = 1$$

---

(2)

قضیه: $f:[a,b]$ پیوسته، $f:(a,b)$ مشتق‌پذیر $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

فرض $f(x) = \ln x$ و با توجه $a=1$, $b=x$ داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\ln x - \ln 1 = \left(\frac{1}{c}\right)(x-1) \leq x-1 \Rightarrow \ln x \leq x-1 \ , \ x \geq 1$$

$$c \in (1,x) \Rightarrow \frac{1}{c} < 1$$

$$x-1 > 0$$

---

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/n)^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$x_i = i/n \Rightarrow \begin{cases} a = x_0 = 0 \\ b = x_n = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n} = 1/n \qquad = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad = \tan^{-1}x \Big|_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0$$

$$= \pi/4 \ .$$

---

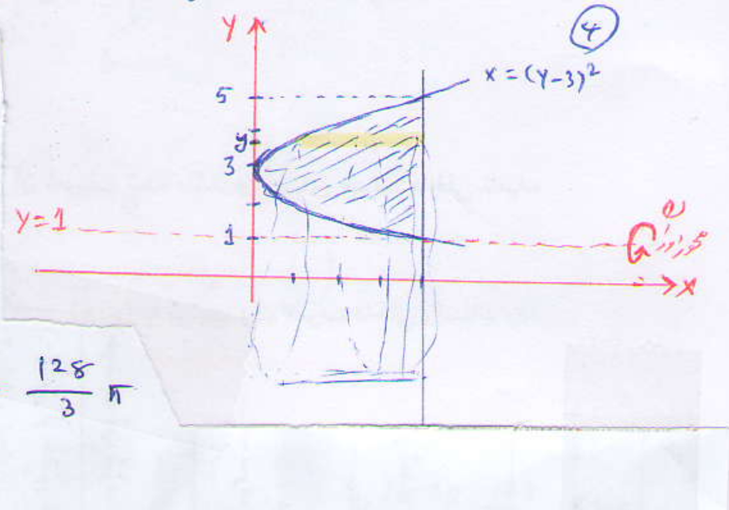
(4)

از روش پوسته، داریم:

$$V = \int_1^5 \underbrace{2\pi(y-1)}_{\text{محیط}}\ \underbrace{(4-(y-3)^2)}_{\text{ارتفاع}}\ \underbrace{(dy)}_{\text{ضخامت}}$$

$$= 2\pi\int_1^5 (-y^3 + 7y^2 - 11y + 5)\,dy$$

$$= 2\pi\left(-\tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{7}{3}y^3 - \tfrac{11}{2}y^2 + 5y\right)\Big|_1^5 = \frac{128}{3}\pi$$



---

(5) $\boxed{a}$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1}dx$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + C$$

---

b

$$\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}dy = \int \frac{1}{\sqrt{(2y-1)^2-4}}dy = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u^2-4}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4y^2-4y-3 = (2y)^2-2(2y)-3 = (2y-1)^2-4 \\ u = 2y-1 \Rightarrow du = 2dy \end{array}}$$

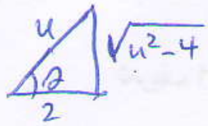
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\sec\theta . \tan\theta\, d\theta}{2\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$$

$u = 2\sec\theta \Rightarrow du = 2\sec\theta . \tan\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$\sqrt{u^2-4} = 2\tan\theta$



$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2-4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}(2y-1) + \frac{1}{2}\sqrt{4y^2-4y-3}\right| + C$$

---

c

$$\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}dy = \int_0^1 y e^{-2y}dy = \left\{-\frac{1}{2}ye^{-2y} - \frac{1}{4}e^{-2y}\right\}_0^1$$

y	$+$ e^{-2y}
1	$-$ $-\frac{1}{2}e^{-2y}$
0	$\frac{1}{4}e^{-2y}$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$$

6

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{du}{u^2}$$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_{\ln 2}^{\ln b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$ همگرا

موفق باشید

دکتر جواد فرضی

۹٤,۹,۸