اعداد مختلط

اعداد مورد استفاده توسط بشر به مرور زمان و نیاز آنها کامل‌تر شده است
برای مثال اعداد شمارشی (اعداد طبیعی)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

از دیدگاه ریاضی برای حل معادلاتی مانند

$$x + 2 = 0$$

کافی نیست وجواب این معادله در این مجموعه قرار نمی‌گیرد لذا این مجموعه کامل‌تر شده و مجموعه اعداد صحیح بوجود آمده است:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

این مجموعه هم کامل نیست، برای مثال معادله $2x - 3 = 0$ دارای جواب در این مجموعه نیست. بنابراین اعداد گویا تعریف می‌شوند:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$$

با این وجود اعداد زیادی وجود دارند که در این مجموعه قرار نمی‌گیرند. برای مثال معادله

$$x^2 - 2 = 0$$

در مجموعه $\mathbb{Q}$ دارای جواب نیست، چون $x = \sqrt{2}$ یک عدد گنگ است.

توجه کنید اعداد گویا دارای نمایش اعشاری مختوم یا متناوب هستند:

$$\frac{1}{10} = 0.1 \quad \text{مختوم}$$

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\bar{3} \quad \text{متناوب}$$

$$\frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots = 0.\overline{428571} \quad \text{متناوب}$$

اما اعداد گنگ دارای نمایش اعشاری نامتناهی و نامتناوب هستند؛ برای مثال عدد

$$x = 0.123456\ldots$$

یک عدد گنگ است.

با افزودن اعداد گنگ به مجموعه اعداد گویا، مجموعه اعداد حقیقی تولید می‌شود:

$$\mathbb{R}.$$

مجموعه اعداد مختلط:

یکی از سوالاتی که همواره ذهن هر آموزنده‌ای را به خود جلب می‌کند آن است که چرا $\sqrt{-1}$ ، $\sqrt{-2}$ ، ... بی‌معنی هستند؟

جواب دقیق آن است که این عبارت‌ها در مجموعه $\mathbb{R}$ بی‌معنی‌اند چون در مجموعه اعداد حقیقی هیچ عددی دارای مجذور منفی نیست یعنی

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$$

بنابراین معادلاتی مانند

$$x^2 + 2 = 0$$

در مجموعه $\mathbb{R}$ نمی‌توانند دارای جواب باشند.

بنابراین برای حل این مشکل مجموعه اعداد حقیقی را توسعه می‌دهیم:

تعریف: عدد مختلط z به صورت زوج مرتب (x, y) تعریف می‌شود که x قسمت حقیقی و y قسمت موهومی آن نامیده می‌شود:

$$z = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{Re} z \\ y = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

اعمال حسابی روی مجموعه اعداد مختلط (که با نماد $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C} \\ z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

جمع: $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

تفاضل: $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2 , y_1 - y_2)$

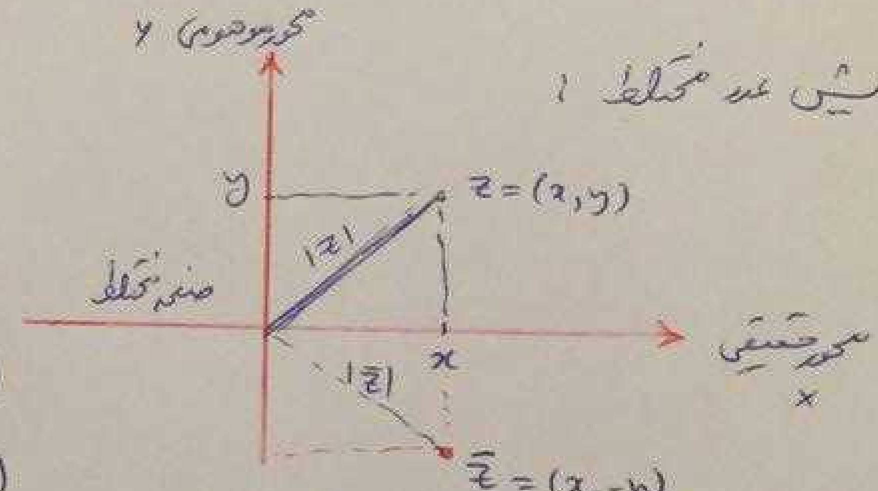
ضرب: $\quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 + y_1 x_2)$

مثال:

$$\begin{cases} z_1 = (-1, 2) \\ z_2 = (-3, 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (-4, 7) \\ z_1 - z_2 = (2, -3) \\ z_1 z_2 = \big((-1)(-3) - (2)(5) , (-1)(5) + (2)(-3)\big) = (-7, -11) \end{cases}$$

نمایش عدد مختلط:



تعریف: اندازه عدد مختلط z به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تعریف: مزدوج عدد مختلط $z = (x, y)$ به صورت $\bar{z} = (x, -y)$ تعریف می‌شود.

قرارداد: اگر قسمت موهومی یک عدد مختلط صفر باشد آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$(x, 0) \equiv x$$

که همان (معادل) اعداد حقیقی می‌باشند.

تعریف: واحد موهومی را با $i = (0, 1)$ تعریف می‌کنیم.

توجه کنید: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1, 0) \equiv -1$

بنابراین عدد مختلط i دارای مجذور -1 می‌باشد.

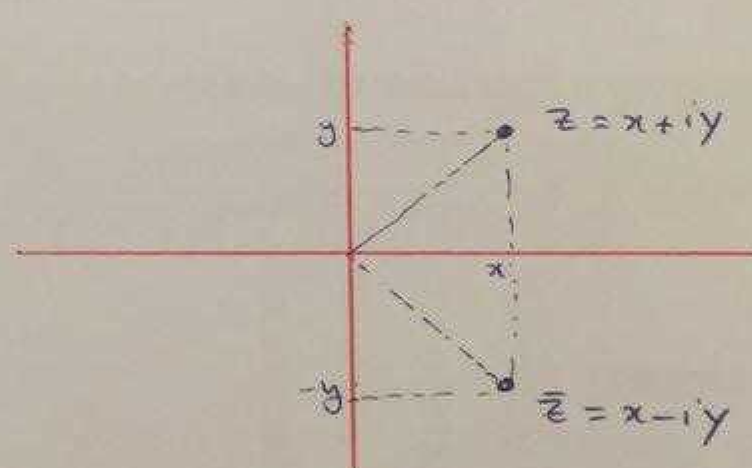
نمایش دیگر اعداد مختلط:

توجه کنید که هر عدد مختلط را می‌توان با کمک واحد موهومی i به شکل ساده‌تر نمایش داد:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + y(0, 1) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

توجه: بنابراین از این به بعد اعداد مختلط را به شکل $z = x + iy$ نمایش می‌دهیم.

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



با توجه به نمایش $z = x + iy$ می‌توانیم جمع و ضرب اعداد مختلط را به شکل معمول انجام دهیم و توجه کنید که $i^2 = -1$.

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

لذا داریم

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

مثال ۲ در ادامه مثال 1 توجه کنید:

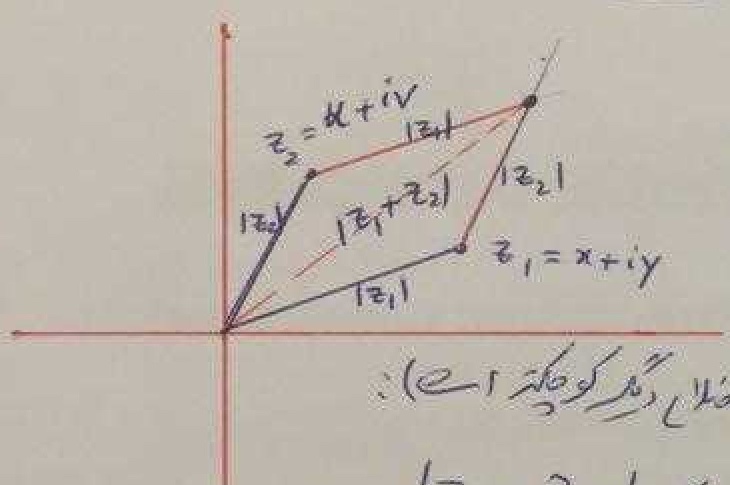
$$\begin{cases} z_1 = -1 + 2i \\ z_2 = -3 + 5i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -1 + 2i - 3 + 5i = -4 + 7i \\ z_1 - z_2 = -1 + 2i + 3 - 5i = 2 - 3i \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = (-1+2i)(-3+5i) = 3 - 5i - 6i + \underbrace{10i^2}_{-10}$$
$$= -7 - 11i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-3) + (5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

نمایش هندسی مجموع دو عدد مختلط و نامساوی مثلثی:



با توجه به شکل، که در آن مجموع دو عدد مختلط z_1 و z_2 نمایش داده شده است می‌توان از خصوصیات مثلث نتیجه گرفت که
(در مثلث اندازه هر ضلع از مجموع اندازه‌های اضلاع دیگر کوچکتر است):

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

معکوس یک عدد مختلط

با استفاده از مفهوم مزدوج می‌توان معکوس یک عدد مختلط را محاسبه کرد:

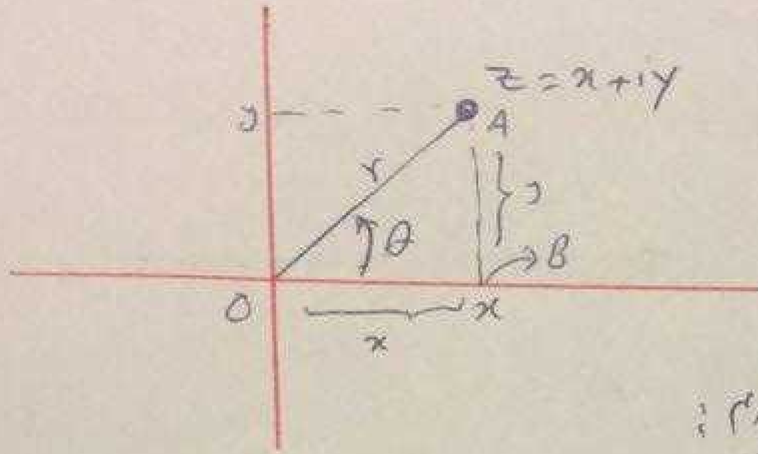
$$\frac{1}{z} = ?$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{|z|^2}_{\text{عدد حقیقی}}}$$

مثال:

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

نمایش قطبی اعداد مختلط



مطابق روابط مثلثاتی روی مثلث قائم الزاویه OAB داریم:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

بنابراین داریم:

$$z = x + iy = r\cos\theta + i r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تعریف: فرمول اویلر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

مثال.

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i0 = 1$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1$$

$$e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = 0 + i = i$$

$$e^{i\pi/4} = \cos\pi/4 + i\sin\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

با استفاده از فرمول اویلر عدد مختلط $z = x + iy$ را به فرم زیر می‌توان نمایش داد:

$$\boxed{z = r e^{i\theta}, \quad r = |z| \text{ و } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

مثال:

$$z = 1+i \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4$$

$$r = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$z = 3 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi/6$$

$$r = |3+i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi/6}$$

تعبیر هندسی حاصل ضرب دو عدد مختلط:

فرض کنید $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ دو عدد مختلط باشند

ابتدا توجه کنید:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$(*) \quad z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = \underbrace{r_1 r_2}_{R}\, e^{i\overbrace{(\theta_1+\theta_2)}^{}_{\theta}}$$

نتیجه 1: اندازه حاصلضرب دو عدد مختلط برابر حاصل ضرب اندازه های آن دو عدد و آرگومان (زاویه) آن برابر مجموع زوایای آن دو عدد می باشد.

نتیجه 2: از حاصل ضرب دو عدد مختلط نتیجه می شود که ضرب عدد z_1 در z_2 باعث دوران عدد مختلط z_2 به اندازه θ_2 می شود.

در نتیجه اگر z یک عدد مختلط باشد حاصل ضرب

$$(1+i)z$$

از نظر هندسی عددی است مختلط که از دوران z به اندازه $\pi/4$ بدست می‌آید

یا عدد iz عبارت است از دوران z به اندازه $\pi/4$.

توان عدد مختلط

اگر در رابطه حاصلضرب (*) دو عدد z_1 و z_2 را برابر z قرار دهیم داریم

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

اگر این ضرب را تکرار کنیم نتیجه می‌شود:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

یعنی یک عدد مختلط وقتی به توان n می‌رسد به اندازه $(n-1)\theta$ دوران می‌یابد

و آرگومان z^n برابر $n\theta$ و اندازه آن برابر r^n خواهد بود.

مثال. حاصل عدد مختلط زیر را بدست آورید:

$$(3+i\sqrt{3})^{100} = ?$$

$$3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi/6} \Rightarrow (3+i\sqrt{3})^{100} = (2\sqrt{3})^{100} e^{i\frac{100\pi}{6}}$$

$$= 2^{100}\cdot 3^{50}\, e^{i2\pi/3}$$

$$\begin{cases} \frac{100}{6}\pi = \frac{96}{6}\pi + \frac{4\pi}{6} = 16\pi + \frac{2\pi}{3} \\ e^{i\frac{100\pi}{6}} = \underbrace{e^{i16\pi}}_{1} e^{i2\pi/3} = e^{i2\pi/3} \end{cases}$$

ریشه nام یک عدد مختلط:

اگر z یک عدد مختلط باشد و n یک عدد صحیح باشد مقدار عدد مختلط

$$z^{1/n}$$

چیست؟

برای محاسبه ریشه nام عدد مختلط z از توان nام که قبلا تعریف شد استفاده می‌کنیم

$$w = z^{1/n} \Longrightarrow w^n = z \Rightarrow R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\begin{cases} \text{معلوم } z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \text{مجهول } w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{cases}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} R^n = r \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} R = r^{1/n} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{array} , \quad n = 0, 1, \dots, n-1$$

بنابراین داریم:

$$z^{1/n} = w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

یعنی:

$$\boxed{z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1}$$

بنابراین ریشه nام هر عدد مختلط z دارای n تا جواب است.

مثال. مقدار $(1+i)^{1/2}$ را محاسبه کنید:

$$z = 1+i \Rightarrow \begin{cases} |z| = |1+i| = \sqrt{2} \\ \theta = \tan\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4 \end{cases}$$

$$(1+i)^{1/2} = (\sqrt{2})^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1$$

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow (\sqrt{2})^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\ k=1 \Rightarrow (\sqrt{2})^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)\right) = (\sqrt{2})^{1/2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \end{cases}$$

با توجه به روابط

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} \cos \pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sin \pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

پس برای ریشه های $(1+i)^{1/2}$ عبارتند از:

$$\pm(\sqrt{2})^{1/2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$$

توجه: برای محاسبه ریشه دوم عدد مختلط z می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\sqrt{z} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{|z|+x} + i\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{|z|-x}\right)$$

که در آن $\mathrm{sgn}(y)$ تابع علامت می‌باشد:

$$\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & y>0 \\ 0 & y=0 \\ -1 & y<0 \end{cases}$$

مثال. با استفاده از فرمول بالا عبارت $(1+i)^{1/2}$ را محاسبه کنید:

$$x=1, \quad |z| = |1+i| = \sqrt{2}, \quad y=1 \Rightarrow \mathrm{sgn}(1)=1$$

$$\sqrt{1+i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt{2}$ جواب قبلی بدست می‌آید.

ریشه nام عدد 1:

$$1^{1/n} = ? \Rightarrow z=1 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \tan^{-1}(0/1) = 0 \\ r = |z| = |1| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$1^{1/n} = (1)^{1/n}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

11)

$$1^{1/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad , k = 0, 1, \ldots, n-1$$

k تا $\frac{2\pi}{n}$

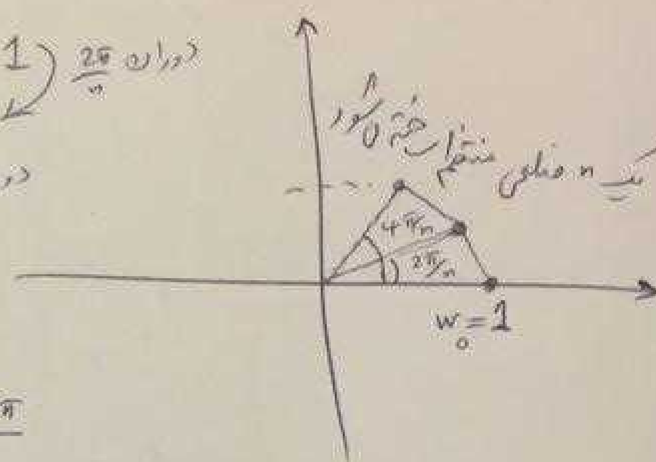
$k=0 \Rightarrow w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i = 1$ دوران $\frac{2\pi}{n}$

$k=1 \Rightarrow w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ دوران $\frac{2\pi}{n}$

$k=2 \Rightarrow w_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$

$\vdots$

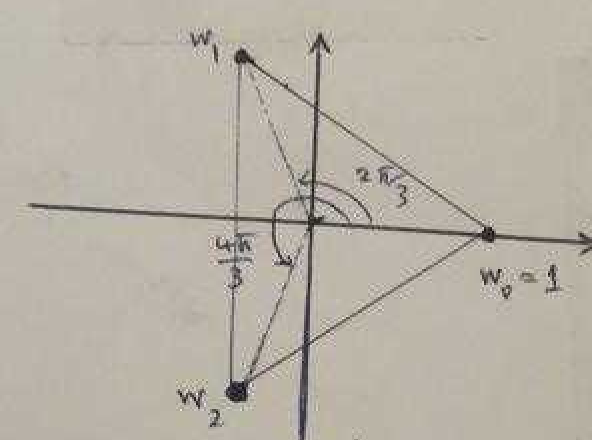
$k=n-1 \Rightarrow w_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$



همانطور که از آرگومان‌ها مشخص است ریشه w_2 از دوران w_1 به اندازه $\frac{2\pi}{n}$ بدست می‌آید. w_3 نیز از دوران w_2 به اندازه $\frac{2\pi}{n}$ بدست می‌آید ... .
لذا اگر w_1 را داشته باشیم همه ریشه‌های عدد 1 بدست می‌آید.

مثال. برای $n=3$ و $n=4$ و $n=5$ ریشه‌ها را حساب کنید.

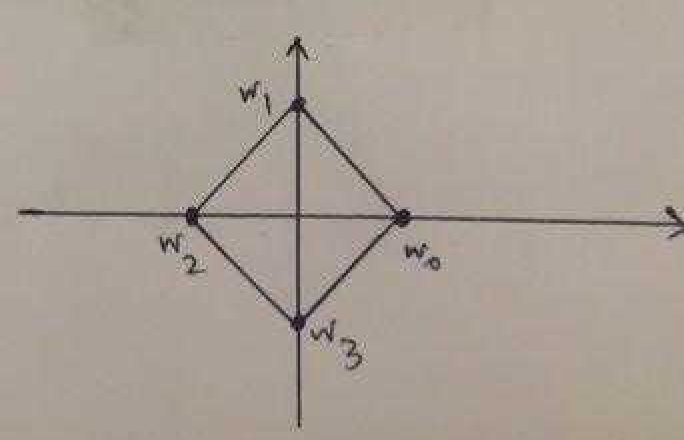
$$n=3 \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \end{cases}$$



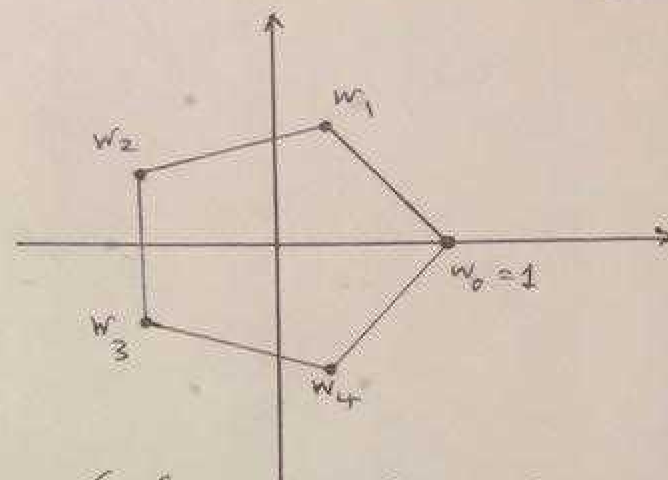
سه ریشه تشکیل یک مثلث منتظم می‌دهند.
(مثلث متساوی الاضلاع)

$$n=4 \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} \\ w_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} \\ w_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ w_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ w_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \end{cases}$$



$$n=5 \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \\ w_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} \\ w_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} \\ w_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} \end{cases}$$



ریشه های پنجم عدد 1 تشکیل یک پنج ضلعی منتظم می دهند

حل معادله درجه دوم با ضرایب مختلط:

$$az^2 + bz + c = 0$$

معادله درجه دوم

با ضرایب مختلط a ، b و c را در نظر میگیریم.

ریشه های این معادله عبارتند از

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت $\sqrt{b^2-4ac}$ دارای دو جواب می باشد که از فرمول ریشه دوم محاسبه می شود

مثال ۱:

$$z^2 + iz + 2 - i = 0$$

$$z = \frac{-i + \sqrt{i^2 - 4(1)(2-i)}}{2} = \frac{1}{2}\left(-i + \sqrt{-9+4i}\right) = \frac{1}{2}\left(-i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{97}-9} + i\sqrt{\sqrt{97}+9}\right)\right)$$

$$\begin{cases} \sqrt{-9+4i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{97}+(-9)} + i\,\mathrm{sgn}(4)\sqrt{\sqrt{97}-(-9)}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{97}-9} + i\sqrt{\sqrt{97}+9}\right) \\ |-9+4i| = \sqrt{(-9)^2+4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97} \end{cases}$$

مثال ۲.

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$
